www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

CONCOURS D'ADMISSION A

l'Ecole Nationale Supérieure des Ingénieurs des Etudes et Techniques d'Armement

1990

MATHEMATIQUES 1

Options M, P et TA

Durée : 4 heures

Il est demandé au candidat de laisser à gauche de la page une marge de 4 cm et de repérer clairement sur sa copie les différentes parties du sujet.

La première partie et la troisième partie sont indépendantes.

PREMIERE PARTIE

On pose $B(u,v)=\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$.

1 - Pour quelles valeurs de $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ cette intégrale est-elle définie ? On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de ces valeurs.

2 - Calculer $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

3 - Prouver que : $\forall (u,v)\in\mathcal{D},\ B(v,u)=B(u,v)$.

4 - Prouver que : $\forall (u,v)\in\mathcal{D},\ B(u,v)=B(u+1,v)+B(u,v+1)$.

5 - Au moyen d'une intégration par parties, prouver que :

$$\forall (u,v)\in\mathcal{D},\ B(u+1,v)=\frac{u}{u+v}B(u,v)$$

6 - En déduire l'expression de $B(u+n,v)$ en fonction de $B(u,v)$ pour tout entier naturel non nul n.

7 - Calculer $B(n,p)$, $(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.

8 - Calculer $B(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. (On pourra chercher une représentation paramétrique de la courbe $y^3=t^2(1-t)$ pour $t\in[0,1]$).

DEUXIEME PARTIE

Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, avec $n>p$; soit $q=n-p$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on considère l'équation d'inconnue y : $y^n+xy^p-1=0$ (E)

T.S.V.P.

1 - Démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, l'équation (E) admet une unique racine $y = y(x)$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et soit la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \qquad x \longmapsto f(x) = y(x)$$

2 - Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et y .

3 - Calculer le développement limité à l'ordre 2 de f en 0.

4 - Montrer que f admet une limite lorsque $x \longrightarrow +\infty$, et déterminer cette limite.

5 - Prouver que $f(x) \sim x^{-\frac{1}{p}}$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

6 - Soit $(\mu , \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Etudier, suivant les valeurs de μ et ν , la convergence de l'intégrale :

$$I(\mu , \nu) = \int_0^{+\infty} [f(x)]^{\mu} . x^{\nu - 1} \, dx$$

7 - Expliquer pourquoi on peut effectuer, dans $I(\mu , \nu)$, le changement de variable $y = f(x)$. En déduire :

$$I(\mu , \nu) = \int_0^1 y^{\mu - p\nu - 1} (1 - y^n)^{\nu - 1} (p + q y^n) \, dy$$

8 - Montrer que $I(\mu , \nu) = \frac{\mu}{\mu + q\nu} B\left(\frac{\mu - p\nu}{n} , \nu\right)$.

9 - Calculer l'intégrale $J(\mu , \nu) = \int_0^{+\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - x)^{\mu} x^{\nu - 1} \, dx$ pour $0 < \nu < \mu$.

TROISIEME PARTIE

Dans cette partie, a et c sont des paramètres . $a \in \mathbb{R}$; $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

On considère la fonction $\Phi(a , c , .)$ de la variable réelle x définie par :

$$\Phi(a , c , .) : x \rightarrow \Phi(a , c , x)$$

$$\Phi(a , c , x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{c(c+1)\ldots(c+n-1)} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

1 - Dans quels cas $\Phi(a , c , .)$ est-elle un polynôme ?

2 - Déterminer l'ensemble de définition de $\Phi(a , c , .)$.

3 - Prouver que $\Phi(a , c , .)$ est solution de l'équation différentielle :

$$x y'' + (c - x) y' - a y = 0 \qquad (E_{a,c})$$

4 - Prouver que :

$$\psi(x) = x^{1-c}\,\Phi(a-c+1, 2-c, x) \text{ est solution de } (E_{a,c}) \text{ sur }]0, +\infty[.$$

5 - En déduire l'expression de la solution générale de $(E_{a,c})$ sur $]0, +\infty[$.

6 - Démontrer que $f(x) = e^{x}.\Phi(c-a, c, -x)$ est solution de $(E_{a,c})$ sur $\mathbb{R}$.

7 - Prouver que, $\forall x > 0$, $\Phi(a, c, x) = e^{x}.\Phi(c-a, c, -x)$.

8 - L'égalité précédente subsiste-t-elle pour $x \in \mathbb{R}$? Pourquoi ?

9 - Calculer la somme $S_n(a, c) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k . C_n^k \frac{a(a+1)...(a+k-1)}{c(c+1)...(c+k-1)}$

QUATRIEME PARTIE

On suppose dans cette partie que $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, avec $a \geq 1$ et $c - a \geq 1$.

1 - Montrer que $\Phi(a, c, x) = \frac{1}{B(a, c-a)} . \sum_{n=0}^{+\infty} B(a+n, c-a) \frac{x^n}{n!}$

2 - Pour x fixé, on considère la série de la variable t :

$$\sum_n t^{a+n-1}.(1-t)^{c-a-1}.\frac{x^n}{n!}$$

Etablir la convergence normale de cette série pour $t \in [0, 1]$ et soit :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{a+n-1}.(1-t)^{c-a-1}.\frac{x^n}{n!} \quad \text{pour } t \in [0, 1].$$

3 - En déduire l'expression intégrale suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \Phi(a, c, x) = \frac{1}{B(a, c-a)} \int_0^1 e^{xt}.t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}.dt$$

troisième.

4 - Retrouver à partir de cette formule les résultats de la deuxième partie, questions 7 et 8.

5 - Calculer $\lim_{x \to -\infty} \Phi(a, c, x)$.

6 - Trouver une relation simple entre $\Phi'(a, c, x)$ et $\Phi(a+1, c+1, x)$.

7 - Donner l'allure de la courbe représentative de $\Phi(a, c, .)$ pour $a \geq 1$ et $c - a \geq 1$, c non entier.

8 - Déterminer une valeur numérique approchée à 10^{-4} près de $\Phi(2, \frac{7}{2}, 1)$.

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail